Traitement des signaux déterministes - Convolution

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Convolution de fonctions

Signal d'un détecteur

Si un capteur mesure $f(x)$ entre $\left[x-\frac{a}{2}, x+\frac{a}{2}\right]$, alors le signal mesuré est :

$$\boxed{h(x)=\frac{1}{a}\int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} f(x')\mathrm{d}x'}$$

Soit $u=x-x'$ et $g(u)=\frac{1}{a}\prod_a(u)$, alors h est la convolution de g par f, noté $h=f*g$:

$$\boxed{h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\mathrm{d}u}$$

Lorsque a tend vers 0, g tend vers une distribution de Dirac.

Réponse impulsionnelle

Si le système est linéaire et invariant, la réponse impulsionnelle donne la réponse à tout signal d'entrée :

$$\boxed{y(t)=h(t)*x(t)}$$

Commutativité

$$\boxed{f*g=g*f}$$

Associativité

$$\boxed{f*(g_1+g_2)=f*g_1+f*g_2}$$

Translation

$$\boxed{h(x-a)=f(x)*g(x-a)=f(x+a)*g(x)}$$

Différentiation

$$\boxed{(f*g)'=f'*g=f*g'}$$

Convolution avec Heaviside

Si $f^+=H(x)f(x)$ et $g^+=H(x)g(x)$, alors :

$$\boxed{(f*g)^+=f^+*g^+}$$

$$\boxed{h(x)=H(x)\int_0^{+\infty} f(x')g(x-x')\mathrm{d}x'}$$

Convolution de distributions

Définition

$$\boxed{\langle S * T, \phi \rangle = \langle S(x), \langle T(y), \phi(x+y) \rangle \rangle}$$

$$\boxed{I = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y)\phi(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

Et en posant $x = u$ et $y = v - u$:

$$\boxed{I = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(v-u)\phi(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(v)\mathrm{d}v \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(v-u)\mathrm{d}u}$$

Attention : pas de translation dans les fonctions tests

Si $\phi(x)$ est à support compact, $\phi(x+y)$ ne l'est pas forcément.

Commutativité

$$\boxed{S * T = T * S}$$

Associativité

$$\boxed{S * (T_1 + T_2) = S * T_1 + S * T_2}$$

Différentiation

$$\boxed{(S * T)' = S' * T = S * T'}$$

Convolution par une distribution de Dirac

Convoluer par δ ne change rien, convoluer par δ_a translate de a.

$$\boxed{\delta * T = T}$$

$$\boxed{\langle \delta_a * T, \phi \rangle = \langle \tau_a T(x), \phi(x) \rangle}$$

Convolution par une distribution de Dirac dérivée

Convoluer par δ' dérive la distribution.

$$\boxed{\langle \delta' * T, \phi \rangle = -\langle T(x), \phi'(x) \rangle = \langle T'(x), \phi(x) \rangle}$$

$$\boxed{\left\langle \delta^{(n)} * T, \phi \right\rangle = \left\langle T^{(n)}(x), \phi(x) \right\rangle}$$