

Probabilité Et Statistiques - Récap Eval

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Lois discrètes

Loi	Probabilité	Fonction génératrice	Fonction caractéristique	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathbb{P}(X = k) = p^k q^{1-k}$	$(1 - p) + pt$	$(1 - p) + pe^{it}$	p	pq
Binomiale	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$(1 - p + pt)^n$	$((1 - p) + e^{it})^n$	np	npq
Poisson	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$e^{\lambda(t-1)}$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$	λ	λ

Lois continues

Loi	Fonction de répartition	Densité	Fonction caractéristique	Espérance	Variance
Uniforme	$\frac{x-a}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$1 - e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$	$\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$	$\frac{\lambda}{\lambda - it}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$	m	σ^2
Normale centrée réduite	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$e^{-\frac{t^2}{2}}$	0	1

Définitions

Variable aléatoire : Fonction de Ω dans $X(\Omega)$

Variable aléatoire discrète : Variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable

Variable aléatoire continue : Variable aléatoire à valeurs dans un ensemble non dénombrable

Fonction de répartition : $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$

Densité : $f_X(x) := \frac{dF_X}{dx}(x)$

Conditions pour que X admette une densité : F_X est continue partout et dérivable presque partout

Fonction génératrice : $G_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}]$

Fonction génératrice, espérance et variance : $G_X(1) = 1$, $G'_X(1) = \mathbb{E}[X]$ et

$$G''_X(1) = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{V}[X]$$

Fonction caractéristique : $\varphi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx$

Espérance : $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$

Variance : $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Covariance : $\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$