Probabilité Et Statistiques - Vecteurs Aléatoires

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Définition

On appelle **vecteur aléatoire** toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Loi d'un vecteur aléatoire

La loi d'un vecteur aléatoire est équivalente à la donnée de chacune de ses lois marginales.

Loi marginale

$$\boxed{\mathbb{P}_{X_i}(E) = \mathbb{P}_X(\mathbb{R}^{i-1} \times E \times \mathbb{R}^{n-i})}$$

La loi du vecteur donne les lois marginales, <u>la réciproque est fausse</u>.

Fonction de répartition

Définition

$$\boxed{F_X(t_1, ..., t_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, ..., X_n \leq t_n)}$$

Limite à gauche

$$\boxed{F_X(t_1, ..., t_n) \underset{\forall i, t_i \to -\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Limite à droite

$$\boxed{F_X(t_1, ..., t_n) \underset{\forall i, t_i \to +\infty}{\longrightarrow} 1}$$

Fonction caractéristique

Définition

$$\boxed{\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{i(t_1 X_1 + ... + t_n X_n)}\right]}$$

Propriétés

$$\boxed{\varphi_X \text{ est continue}}$$

$$\boxed{|\varphi_X| \leq 1}$$

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall b \in \mathbb{R}^n, \varphi_{AX+b}(t) = e^{it\langle t,b \rangle} \varphi_X(tA)}$$

Vecteurs aléatoires discrets

Définition

Un vecteur aléatoire X est dit discret s'il ne prend qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs :

$$\boxed{\mathbb{P}_X = \sum_{s \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X = s)\delta_s}$$

Loi marginale

$$\boxed{\mathbb{P}_{X_i}(x) = \sum_{\substack{s \in X(\Omega) \\ s_i = x}} \mathbb{P}_X(s)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{X_i} = \sum_{s \in X(\Omega)} \left(\sum_{\substack{s \in X(\Omega) \\ s_i = x}} \mathbb{P}_X(s) \right) \delta_x}$$

Loi de la somme des marginales

Soit $X = (X_1, X_2)$ et $S = X_1 + X_2$:

$$\boxed{\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n - k)}$$

Vecteurs aléatoires à densité

Définition

Un vecteur aléatoire X est dit à densité s'il existe une fonction f_X telle que :

$$\boxed{\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)dx}$$

On peut alors écrire $\mathbb{P}_X = f_X dx$.
Évidemment, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)dx = 1$.

Densité des composantes

Cas général

Soit $\tilde{x_i} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$:

$$\boxed{f_{X_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^{i-1} \times \mathbb{R}^{n-i}} f_X(x_1, ..., x_n) \mathrm{d}\tilde{x_i}}$$

Cas d'un couple de variables aléatoires (X, Y)

$$\boxed{\begin{array}{l} f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)dy \\ f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)dx \end{array}}$$

Loi de la somme des marginales

Soit $X = (X_1, X_2)$ et $S = X_1 + X_2$:

$$\boxed{f_S(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1,X_2}(u, x - u)du}$$

Indépendance des composantes

Définition

Soit X à densité

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\text{Les } X_1, ..., X_n \text{ sont indépendantes} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall I_i, \mathbb{P}(X_1 \in I_1, ..., X_n \in I_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in I_i) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, F_X(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n, \varphi_X(u_1, ..., u_n) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(u_i) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(X = (x_1, ..., x_n)) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) \text{ si } X \text{ est discret} \\
&\Leftrightarrow \quad f_X(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \text{ si } X \text{ est à densité}
\end{aligned}
}
$$

Lois conditionnelles

Définitions

Cas discret

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de v.a. discrètes.
La loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ est :

$$\boxed{\mathbb{P}(X = x | Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}}$$

Cas à densité

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de v.a. à densité.
La densité conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ est :

$$\boxed{f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}}$$