Traitement des signaux déterministes - Transformée En Ondelettes

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Limites de la transformée de Fourier

Localisation temps / fréquence

La transformée de Fourier donne une bonne description des signaux stationnaires, mais elle ne permet pas de décrire les signaux non stationnaires (signaux dont les caractéristiques varient dans le temps).
Solution : utiliser une fenêtre glissante pour décrire le signal.
Problème : $F_u^-[f(t)\Pi(t)] = F_u[f(t)] * F_u[\Pi(t)]$ et $F_u[\Pi(t)]$ est le sinus cardinal, qui génère donc une distortion...

Le fenêtrage (***Short Time Fourier Transform***)

Définition

$$\boxed{STFT(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t-\tau)x(t)e^{2i\pi ft}\mathrm{d}t = \widehat{X}(\tau, f)}$$

Il faut maintenant choisir la bonne largeur de fenêtre.

Diagramme temps / fréquence

On peut représenter le signal dans un diagramme temps / fréquence, avec l'axe des abscisses représentant les fréquences et l'axe des ordonnées représentant le temps.
On se sert ensuite de ce diagramme pour déterminer si la fenêtre choisie est adaptée ou non.

Contraction du signal

Domaine temporel

On pose $s < 1$ le facteur de contraction temporelle.

$$\boxed{f_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right)}$$

La contraction se fait à énergie constante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_s(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}t$$

Domaine fréquentiel

Si on fait la transformée de Fourier de $f_s(t)$, on obtient :

$$\boxed{\widehat{f_s}(t) = \sqrt{s}\widehat{f}(st)}$$

Principe d'Heisenberg

On peut appliquer le principe d'incertitude d'Heisenberg au domaine du traitement du signal, en disant que l'on ne peut pas connaître avec précision la fréquence et le temps.

$$\boxed{\Delta t \Delta f = Cste}$$

Localisation dans en temps et en fréquence

Pour contrer le principe d'incertitude d'Heisenberg, on le localiste en temps et en fréquence :

$\bar{f}$: fréquence moyenne

$$\boxed{\bar{f} = \frac{1}{||f||^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t|f(t)|^2 \mathrm{d}t}$$

$\bar{\omega}$: pulsation moyenne

$$\boxed{\bar{\omega} = \frac{1}{2\pi||f||^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega|\widehat{f}(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega}$$

Variances

$$\boxed{\sigma_t^2 = \frac{1}{||f||^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\bar{f})^2|f(t)|^2 \mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi||f||^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega-\bar{\omega})^2|\widehat{f}(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega}$$

$$\boxed{\sigma_t^2\sigma_\omega^2 = ??}$$

Principe de la transformée en ondelettes

Paramètres de la transformée en ondelettes

a : facteur d'échelle

a petit $\Longleftrightarrow$ hautes fréquences

a grand $\Longleftrightarrow$ basses fréquences

b : facteur de translation

b petit $\Longleftrightarrow$ fenêtre tôt dans le temps

b grand $\Longleftrightarrow$ fenêtre tard dans le temps

Transformée en ondelettes et Séries de Fourier

La Série de Fourier d'un signal associé à la distribution T est

$$\boxed{T(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}}$$

Où les coefficients C_n sont donnés par

$$\boxed{C_n = \frac{1}{T}\int_a^a +T f_0(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} \mathrm{d}x}$$