Traitement des signaux déterministes - Transformée De Laplace

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Transformée de Laplace des fonctions

La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est définie par :

$$\boxed{\tilde{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-pt} f(t) \mathrm{d}t = \mathcal{L}_p^- [f(t)]}$$

Attention, $p = a + i\omega$ est un nombre complexe, ainsi

$$\boxed{\tilde{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} \left(e^{-at} f(t)\right) \mathrm{d}t = F_{\frac{\omega}{2\pi}}^- \left[e^{-at} f(t)\right]}$$

La transformée de Laplace est donc la transformée de Fourier de $e^{-at} f(t)$.

Propriétés

Linéarité

$$\boxed{\mathcal{L}_p^- [\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \tilde{f}(p) + \beta \tilde{g}(p)}$$

Dilatation

$$\boxed{f(ct) \implies \frac{1}{|c|} \tilde{f}\left(p\right)}$$

Dérivation

$$\boxed{\mathcal{L}_p^- [f^{(n)}(t)] = p^n \tilde{f}(p)}$$

Translation

$$\boxed{\mathcal{L}_p^- [f(t-\tau)] = e^{-p\tau} \tilde{f}(p)}$$

Convolution

$$\boxed{\mathcal{L}_p^- [f * g] = \tilde{f}(p) \tilde{g}(p)}$$

Intégration

$$\boxed{\mathcal{L}_p^- \left[\int_0^t f(\tau) \mathrm{d}\tau\right] = \frac{\tilde{f}(p)}{p}}$$

Transformée de Laplace des fonctions périodiques

$$\boxed{\mathcal{L}_p^- [f(t)] = \frac{\tilde{f}_0(p)}{1 - e^{-2\pi p}}}$$

Transformée de Laplace des distribution de $\mathcal{D}'_+$

$$\boxed{\mathcal{L}_p^-[T] = \left\langle T, e^{-pt} \right\rangle}$$

Attention : $t \mapsto e^{-pt} \notin \mathcal{D}$ donc $\langle T, e^{-pt} \rangle$ n'est pas toujours définie.

Transformée de Laplace des distributions usuelles

Distribution de Dirac

$$\boxed{\mathcal{L}_p^-[\delta(t)] = 1}$$

Distribution de Heaviside

$$\boxed{\mathcal{L}_p^-[H(t)] = \frac{1}{p}}$$