

Signaux Aléatoires - Statistiques d'Ordre 2

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Lois à 2 variables aléatoires

Couple de VA

$$Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

Loi marginale

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^n p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Fonction de répartition
conjointe

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$$

Loi conjointe

$$p_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Loi conditionnelle

$$p_{X|Y=y}(X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

Densité de probabilité
conjointe

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Moments d'ordre (p, q) (cas discret)

$$\mathbb{E}[X^p Y^q] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^p y_j^q p_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Moments d'ordre (p, q) (cas continu)

$$\mathbb{E}[X^p Y^q] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^p y^q f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

Corrélation et covariance

Corrélation

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathbb{E}[X^c Y^c]}{\sqrt{\mathbb{E}[(X^c)^2]} \sqrt{\mathbb{E}[(Y^c)^2]}}$$

Covariance

$\text{Cov}(X, Y) = 0 \iff$ non corrélées

$\mathbb{E}[XY] = 0 \iff$ orthogonales

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X^c Y^c] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Autocorrélation et Intercorrélation

Autocorrélation

$$r_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X_{t_1} X_{t_2}^*]$$

$$r_{XX}(t, t) = \mathbb{E}[|X_t|^2] = \mu_{2,X}(t)$$

Autocovariance

$$c_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X_{t_1}^c X_{t_2}^{c*}] = r_{XX}(t_1, t_2) - \mathbb{E}[X_{t_1}] \mathbb{E}[X_{t_2}^*]$$

$$c_{XX}(t, t) = \sigma_X^2(t)$$

Intercorrélation et intercovariance

Intercorrélation

$$r_{XY}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X_{t_1} Y_{t_2}^*]$$

Intercovariance

$$c_{XY}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X_{t_1}^c Y_{t_2}^{c*}] = r_{XY}(t_1, t_2) - \mathbb{E}[X_{t_1}] \mathbb{E}[Y_{t_2}^*]$$