Signaux Aléatoires - Stationnarité Et Ergodicité

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Stationnarité

Stationnarité au sens strict

Un signal est **S.S.S.** si :

- Moments d'ordre 1 constants : $\forall t, \mathbb{E}[X_t] = \mu_{1,X}$
- Moments d'ordre 2 constants : $\forall t, \mathbb{E}[X_t^2] = \mu_{2,X}$
- Variance constante : $\forall t, \mathbb{E}[|X_t^c|^2] = \sigma_X^2$
- Autocovariance ne dépend que de l'écart : $c_{XX}(t_1, t_1 + \tau) = c_{XX}^s(\tau)$

...

En gros **toutes les statistiques de tous les ordres sont constantes**

Stationnarité au sens large

Un signal est **S.S.L.** si :

- Moments d'ordre 1 constants : $\forall t, \mathbb{E}[X_t] = \mu_{1,X}$
- Moments d'ordre 2 constants et finis : $\forall t, \mathbb{E}[X_t^2] = \mu_{2,X} < \infty$
- Autocovariance ne dépend que de l'écart : $c_{XX}(t_1, t_1 + \tau) = c_{XX}^s(\tau)$

Un signal peut être stationnaire à l'ordre 2 sans être stationnaire à l'ordre 1.

IID $\implies$ S.S.S. $\implies$ S.S.L.

Densité spectrale de puissance

La DSP est la transformée de Fourier de l'autocorrélation :

$$\hat{R}_{XX}^s(\nu) = \text{TF}[r_{XX}^s[m]] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_{XX}^s[m] e^{-j2\pi}$$

Puissance d'une suite aléatoire

$$P_X = r_{XX}^s[0] = \int_{-0.5}^{0.5} \hat{R}_{XX}^s(\nu) d\nu = \sigma_X^2 + \mu_{1,X}^2$$

Statistiques temporelles

Attentions ces valeurs peuvent différentes d'un instant à l'autre

Moments d'ordre m

$$\boxed{\bar{x}_m \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} x[n]^m}$$

Moments centrés d'ordre m

$$\boxed{\bar{x}_m^c \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \left(x[n] - \bar{x}_1\right)^m}$$

Fonction d'autocovariance

$$\boxed{\bar{xx}[m] \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \left(x[n] - \bar{x}_1\right)\left(x[n+\tau] - \bar{x}_1\right)}$$

Ergodicité

Ergodicité à l'ordre n

Un signal est ergodique à l'ordre n si les grandeurs temporelles des ordres 1 à n sont égales aux grandeurs statistiques

Ergodicité au sens strict

Un signal est ergodique au sens strict si il est ergodique à tous les ordres

Ergodicité forte

Un signal est fortement ergodique si la moyenne temporelle existe et possède la même valeur $\bar{x}$

Si le signal est aussi stationnaire à l'ordre 1 : $\mathbb{E}[X_t] = \mu_X$