Probabilité Et Statistiques - Fonctions Caractéristiques

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Dans ce chapitre, X est une variable aléatoire réelle.
On ne suppose pas que X soit discrète ou continue.

Définition

$$\boxed{\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right)}$$

Si X est discrète et $I = X(\Omega)$, on a :

$$\boxed{\varphi_X(t) = \sum_{k \in I} e^{itk} \mathbb{P}(X = k)}$$

Si X est à densité f_X, on a :

$$\boxed{\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) \mathrm{d}x}$$

Propriétés des fonctions caractéristiques

Continuité et bornitude

Soit X une v.a. réelle discrète ou à densité, alors

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_X \text{ est bornée de module inférieur à } 1 \\ \varphi_X \text{ est continue} \\ \varphi_X(0) = 1 \end{cases}}$$

Dérivabilité

$$\boxed{\varphi'_X(0) = i\mathbb{E}(X)}$$

$$\boxed{\varphi''_X(0) = -\mathbb{E}(X^2)}$$

Unicité par rapport à la loi

$$\boxed{\varphi(X_1) = \varphi(X_2) \Rightarrow X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivent la même loi}}$$

Somme

Sous réserve d'indépendance :

$$\boxed{\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)}$$

Injectivité

Soit X une v.a. réelle telle que φ_X soit intégrable au sens de Lebesgue, alors X est à densité et :

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(t) e^{-itx} \mathrm{d}t}$$

Fonctions caractéristiques usuelles

Loi de Bernoulli : $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$

$$\boxed{\mathbb{P}_{X_1} = (1-p)\delta_0 + p\delta_1}$$

$$\boxed{\varphi_{X_1}(t) = 1 - p + pe^{it}}$$

Loi binomiale : $X_2 \sim \mathcal{B}(n,p)$

$$\boxed{\mathbb{P}_{X_2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k}$$

$$\boxed{\varphi_{X_2}(t) = (1 - p + pe^{it})^n = \varphi_{X_1}^n(t)}$$

Loi de Poisson : $X_3 \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$\boxed{\mathbb{P}_{X_3} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \delta_k}$$

$$\boxed{\varphi_{X_3}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}}$$

Loi uniforme : $X_4 \sim \mathcal{U}([a,b])$

$$\boxed{f_{X_4} = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)}$$

$$\boxed{\varphi_{X_4}(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}}$$

Loi uniforme centrée : $\tilde{X}_4 \sim \mathcal{U}([-a,a])$

$$\boxed{f_{\tilde{X}_4} = \frac{1}{2a} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)}$$

$$\boxed{\varphi_{\tilde{X}_4}(t) = \frac{\sin(at)}{at}}$$

Loi exponentielle : $X_5 \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$\boxed{f_{X_5} = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)}$$

$$\boxed{\varphi_{X_5}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}}$$

Loi normale centrée réduite : $X_6 \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\boxed{f_{X_6} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

$$\boxed{\varphi_{X_6}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

Loi normale quelconque : $X_7 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\boxed{f_{X_7} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

$$\boxed{\varphi_{X_7}(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}$$