Traitement des signaux déterministes - Echantillonnage

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Théorème d'échantillonnage de Shannon

Énoncé

Une fonction f dont la TF est à support dans $[-U_0, U_0]$
est entièrement déterminée par ses valeurs en $x = nT$ où $T \leqslant \dfrac{1}{2U_0}$ et $n \in \mathbb{Z}$

Preuve

On prend F l'échantillonnage de f :

$$\boxed{F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta(x-nT) = f(x)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-nT)}$$

Alors

$$\boxed{\widehat{F}(u) = \widehat{f}(u) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\delta(u-\frac{n}{T})}$$

En prenant $\dfrac{1}{T} > 2U_0$, **les patterns ne se chevauchent pas** et on peut retrouver f à partir de F :

$$\text{On pose } \widehat{g}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } |u| \leqslant U_0 \\ 0 & \text{si } |u| > U_0 + \frac{1}{T} \end{cases}$$

$$\text{Alors } \frac{1}{T}\widehat{f}(u) = \widehat{g}(u)\widehat{F}(u)$$

$$\text{Donc } \frac{1}{T}f(x) = g(x) * F(x)$$

$$\text{Donc } f(x) = T\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)g(x-nT)$$

Donc

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n}{2U_0}\right)\frac{\sin(2\pi U_0 x - nT)}{2\pi U_0 x - nT}}$$

Et cette fonctionne est une formule **d'interpolation exacte**.