Electromagnétisme

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Equations de Maxwell

Maxwell-Gauss

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\underset{\text{Green-Ostrogradski}}{\Longrightarrow}$$

Théorème de Gauss

$$\boxed{\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}}$$

Maxwell-Faraday

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}}$$

$$\underset{\text{Stokes}}{\Longrightarrow}$$

Loi de Faraday

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{mag}}}{\mathrm{d}t}}$$

Maxwell-Thomson

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{B}) = 0}$$

$$\underset{\text{Green-Ostrogradski}}{\Longrightarrow}$$

Flux conservatif du champ magnétique

$$\boxed{\oiint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$

Maxwell-Ampère

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t}}$$

$$\underset{\text{Stokes}}{\Longrightarrow}$$

Théorème d'Ampère

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = \mu_0 i_{\mathrm{enlacé}} + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{\mathcal{S}} \frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t}}$$

Equation de conservation de la charge

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Relation de Maxwell

$$\boxed{\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1}$$

ARQS Électromagnétique

	Maxwell-Gauss	Maxwell-Faraday	Maxwell-Thomson	Maxwell-Ampère
Régimes variables	$\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$	$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t}$
ARQS	$\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$	$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$
Régimes stationnaires	$\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$	$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$

Propagation des champs électromagnétiques

overrightarrowE et $\overrightarrow{B}$ vérifient dans le vide l'équation de d'Alembert avec une célérité $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} \\[2ex] \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} \end{array}}$$

$\boxed{\text{Les équations de Maxwell sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels}}$

Forces de Laplace

Force de Laplace élémentaire

Un élément en M parcouru par une intensité i et plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$,

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{f_{\mathcal{L}}} = i\overrightarrow{\mathrm{d}l_M} \wedge \overrightarrow{B}(M)}$$

Résultante des forces de Laplace

$$\boxed{\overrightarrow{F_{\mathcal{L}}} = \int_{M\in \text{fil}} \mathrm{d}\overrightarrow{f_{\mathcal{L}}} = \int_{M\in \text{fil}} i\overrightarrow{\mathrm{d}l_M} \wedge \overrightarrow{B}(M)}$$

Couple magnétique

Moment résultant des forces de Laplace sur un dipôle de moment dipolaire magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{\mathcal{L}}} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{B}}$$

Effets du couple magnétique

Le couple magnétique exercé par un champ $\overrightarrow{B}$ sur un dipôle de moment dipolaire magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ a tendance à l'orienter dans la direction de $\overrightarrow{B}$.
Si $\overrightarrow{M}$ est dans le même sens que $\overrightarrow{B}$: équilibre stable.
Si $\overrightarrow{M}$ est dans le sens opposé à $\overrightarrow{B}$: équilibre instable.

Fabrication d'un moteur

On peut créer un champ tournant : Deux bobines perpendiculaires avec

- Une même amplitude d'intensité i_0
- Une même pulsation ω.
- $i_1(t) = i_0 \sin(\omega t)$ et $i_2(t) = i_0 \cos(\omega t)$.

Induction

Induction de Neumann

Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

Induction de Lorentz

Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Flux magnétique

Flux magnétique à travers un circuit fermé de surface S :

$$\boxed{\Phi_{\vec{B}/S} = \iint_{M \in S} \vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S_M}}$$

Loi de Faraday

Force électromotrice e induite dans un circuit fermé de surface S :

$$\boxed{e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\vec{B}/S}}{\mathrm{d}t}}$$

Inductance propre

$$\boxed{\Phi_{\text{propre}} = Li}$$

Force électromotrice auto-induite

$$\boxed{e_{\text{auto}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\text{propre}}}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

Energie magnétique stockée

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2}Li^2(t)}$$

Inductance mutuelle

Flux magnétique envoyés d'un circuit à l'autre :

$$\boxed{\Phi_{1\to 2} = Mi_1} \qquad \boxed{\Phi_{2\to 1} = Mi_2}$$

Où M est l'inductance mutuelle (en H).

Force électromotrice mutuelle

Deux circuits fermés où i_1 et i_2 varient, alors il y a une force électromotrice induite :

$$\boxed{e_1 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{1,\text{propre}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\Phi_{1\to 2}}{\mathrm{d}t} = -L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{e_2 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{2,\text{propre}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\Phi_{2\to 1}}{\mathrm{d}t} = -L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}}$$