Electrocinétique

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Lois de Kirchhoff

Loi des Nœuds

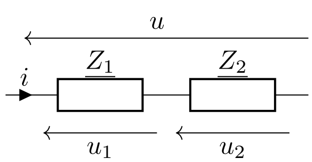
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(\pm)i_k = 0}$$

Loi des Mailles

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(\pm)u_k = 0}$$

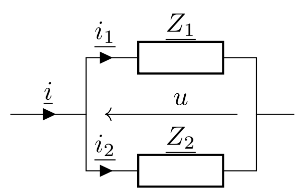
Diviseurs idéaux

Diviseur idéal de tension



$$\boxed{\underline{u_1} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\underline{u}}$$

Diviseur idéal de courant



$$\boxed{\underline{i_1} = \frac{\frac{1}{\underline{Z_1}}}{\frac{1}{\underline{Z_1}}+\frac{1}{\underline{Z_2}}}\underline{i}}$$

Dipôles électriques

Condensateur

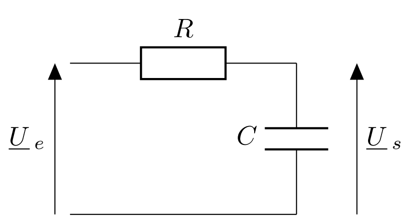
$$\boxed{i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}} \qquad \boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu^2}$$

Bobine

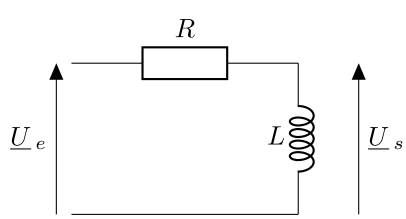
$$\boxed{u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}} \qquad \boxed{\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2}$$

Circuits RC, RL, RLC

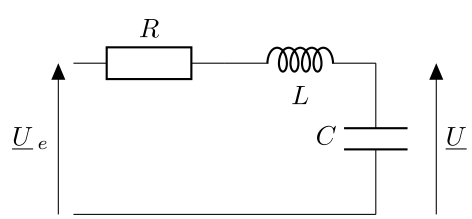
Circuit RC



Circuit RL

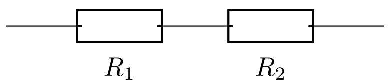


Circuit RLC

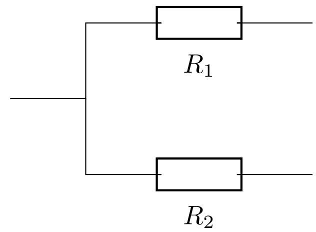


Mise en série et en parallèle de composants

Résistances



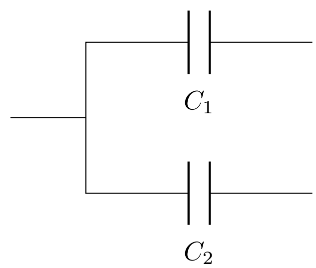
$$\boxed{R_{\text{eq}} = R_1 + R_2}$$



$$\boxed{\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

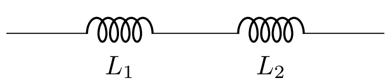
Condensateurs

$$\boxed{\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

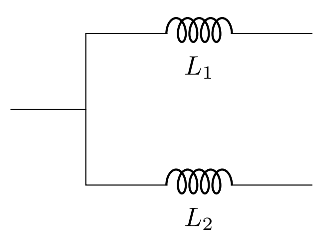


$$\boxed{C_{\text{eq}} = C_1 + C_2}$$

Bobines



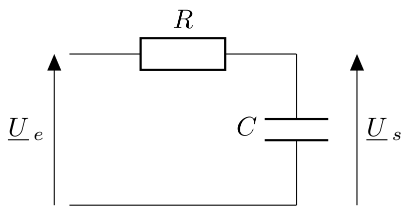
$$\boxed{L_{\text{eq}} = L_1 + L_2}$$



$$\boxed{\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$

Filtrage à l'ordre 1

Filtre passe-bas

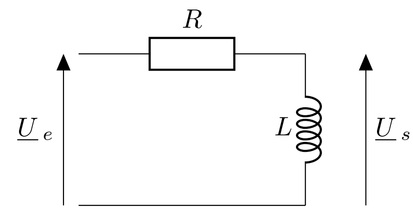


Equation différentielle : $\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = e(t)}$ $(\tau = RC)$

Solutions : $\boxed{u(t) = \lambda \mathrm{e}^{-t/\tau}}$

Fonction de transfert : $\boxed{\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$

Filtre passe-haut



Equation différentielle : $\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = e(t)}$ $\left(\tau = \frac{L}{R}\right)$

Solutions : $\boxed{u(t) = \lambda \mathrm{e}^{-t/\tau}}$

Fonction de transfert : $\boxed{\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$

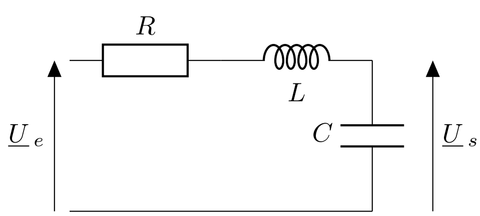
Filtrage à l'ordre 2

NB : Attention à la résonance possible dans le diagramme de Bode

Equation différentielle :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 e(t)} \left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$$

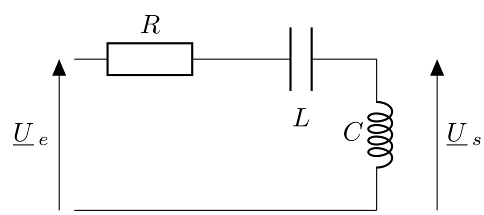
Filtre passe-bas



Fonction de transfert :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

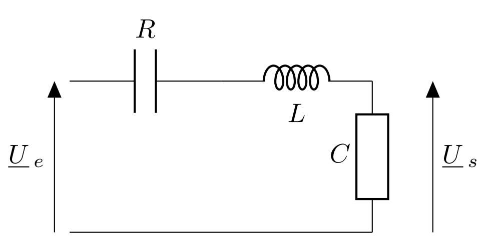
Filtre passe-haut



Fonction de transfert :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Filtre passe-bande



Fonction de transfert :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{\frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Régime libre des filtres à l'ordre 2

$$\text{Equation : } \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$$

$$\text{D'où : } z^2 + \frac{\omega_0}{Q}z + \omega_0^2 = 0$$

Régime apériodique	Régime critique	Régime Pseudo-périodique
Racines : Deux racines réelles négatives $r = \frac{1}{2}\Big(-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}\Big)$	Racine double Une racine réelle négative $r = -\frac{\omega_0}{2Q}$	Racines : Deux racines complexes conjugées $r = \frac{1}{2}\Big(-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{\lvert\Delta\rvert}\Big)$
Les racines sont homogènes à des temps		
On note $r_1 = -\frac{1}{\tau_1}, r_2 = -\frac{1}{\tau_2}$ $s(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + B\mathrm{e}^{-t/\tau_2}$	On note $r = -\frac{1}{\tau} = -\frac{\omega_0}{2Q}$ $s(t) = (At + B)\mathrm{e}^{-t/\tau}$	On note $r = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_p$ $s(t) = (A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t))\mathrm{e}^{-t/\tau}$

Filtrage sur un signal complet

Décomposition en Série de Fourier

$$\boxed{v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega_e t + \varphi_n)}$$

$$V_0 : \text{ valeur moyenne (composante continue), } V_0 \triangleq \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)\mathrm{d}t$$

Pour filtrer le signal, on applique le filtre à chaque composante de Fourier.

Stratégie : déssiner le diagramme de Bode du filtre par dessus le spectre du signal

Résonance

Bande passante

Bande passante : Intervalle vérifiant $\boxed{I(\omega) \geq \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}}$

Résonance en intensité

$$\boxed{\underline{I}(\omega) = I\exp(j\varphi) = \frac{I_{\max}}{1 + jQ\Big(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\Big)}}$$

I max à la puslation de résonance : $\boxed{\omega_r = \omega_0}$

Existence pour tout Q

Acuité : $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ Bande passante faible $\Longleftrightarrow$ acuité élevée

Résonance en tension

$$\boxed{\underline{U}(\omega) = U\exp(j\varphi) = \frac{A_{\mathrm{m}}}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \Big(\frac{\omega}{\omega_0}\Big)^2}}$$

Existence pour $\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$

Pulsation de résonance : $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$