Produits Scalaires

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Définitions

Produit scalaire

Une fonction $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire si elle est :

- Bilinéaire : $\varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x,z) + \beta\varphi(y,z)$
- Symétrique : $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$
- Définie : $\varphi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0$
- Positive : $\varphi(x,x) \geq 0$

Norme

Norme de x par le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$: $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$

Produits scalaires canoniques

$$\text{Dans } \mathbb{R}^n : \langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\text{Dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \langle A|B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ij} = \mathrm{tr}(A^T B)$$

$$\text{Dans } \mathcal{C}([a,b]) : \langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

Inégalités

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\boxed{|\langle x|y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|}$$

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Big|\int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t\Big| \leq \int_I |f(t)g(t)|\mathrm{d}t \leq \Big(\int_I f^2(t)\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_I g^2(t)\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Propriétés de la norme

$$\boxed{\|x\| = 0 \implies x = 0_E}$$

$$\boxed{\|\lambda \cdot x\| = |\lambda|\|x\|}$$

$$\boxed{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|}$$

Inégalité angulaire

$$\boxed{\forall (x,y) \in E \setminus \{0_E\}^2, \exists! \theta \in [0,\pi], \langle x|y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta}$$

Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux

$$\boxed{x \perp y \iff \langle x|y\rangle = 0}$$

Si les (v_i) sont orthogonaux 2 à 2,

$$\boxed{\Big\| \sum_{i=1}^{n} v_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2}$$

Vecteur orthogonal à un sous-espace

$$\boxed{x \perp E \iff \forall y \in E, x \perp y}$$

Sous-espaces orthogonaux

$$\boxed{E \perp F \iff \forall x \in E, \forall y \in F, x \perp y}$$

Si les (v_i) sont orthogonaux 2 à 2,
Ils sont linéairement indépendants
($(v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille libre)

$$\boxed{A^{\perp} = \{y \in E, |\forall x \in A, x \perp y\}}$$

$$\boxed{A \perp B \iff A \subseteq B^{\perp} \iff B \subseteq A^{\perp}}$$

$$\boxed{A \cap A^{\perp} = \{0_E\}}$$

$$\boxed{A \subseteq (A^{\perp})^{\perp}}$$

Si F est de dimension finie,

$$\boxed{F \oplus F^{\perp} = E}$$

$$\boxed{F = (F^{\perp})^{\perp}}$$

Bases Orthonormées

Base orthonormée : Les vecteurs sont orthogonaux 2 à 2 et de norme 1

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], x_i = \langle x|\varepsilon_i\rangle}$$

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = X^T X}$$

$$\boxed{\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y} \quad (X = [x]_{\mathcal{B}} \text{et} Y = [y]_{\mathcal{B}})$$

Si $A = (a_{ij})$ est la mat. de f dans la b.o.n $\mathcal{B}$,

$$\boxed{a_{ij} = \langle \varepsilon_i | f(\varepsilon_j)\rangle}$$

Algorithme de Gram-Schmidt

On veut transformer $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ en une b.o.n $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$

Etape 1

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

Etape 2

Soit $\hat{\varepsilon}_2 = e_2 - \lambda_1 \varepsilon_1$
$\hat{\varepsilon}_2 \perp \varepsilon_1 \iff \lambda_1 = \langle e_2|\varepsilon_1\rangle$
Il faut $\|\varepsilon_2\| = 1$ donc $\varepsilon_2 = \dfrac{\hat{\varepsilon}_2}{\|\hat{\varepsilon}_2\|}$

Etape n

Soit $\hat{\varepsilon}_n = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \varepsilon_i$
$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \hat{\varepsilon}_n \perp \varepsilon_i \iff \lambda_i = \langle e_n|\varepsilon_i\rangle$
Il faut $\|\varepsilon_n\| = 1$ donc $\varepsilon_n = \dfrac{\hat{\varepsilon}_n}{\|\hat{\varepsilon}_n\|}$

Projection orthogonale

On a F un sev de dimension <u>finie</u> de E et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une b.o.n de F

Projection orthogonale sur un sous-espace

$$\boxed{\forall x \in E, p(x) \in F \quad \text{et} \quad x - p(x) \perp F}$$

Projeté orthogonal

$$\boxed{p(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x | \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i}$$

Théorème des moindres carrés

$$\boxed{\forall y \in F, \|x - p(x)\| \leq \|x - y\|}$$

Inégalité de Bessel

$$\boxed{\|p(x)\| \leq \|x\|}$$

Distance à un sev

$$\boxed{d(x, F) = \|x - p(x)\| = \min_{y \in F} \|x - y\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p(x)\|^2}}$$

Hyperplans

Définition

$$\boxed{D^\perp = H}$$

Si dimension finie :

$$\boxed{H^\perp = D}$$

Théorème de représentation de Riesz

Si E est un espace vectoriel de <u>dimension finie</u> :

$$\boxed{\forall \varphi : E \mapsto \mathbb{R}, \exists! \alpha \in E, \forall x \in E, \varphi(x) = \langle x | \alpha \rangle}$$