Probabilités

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Définitions

Tribu

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu si

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Probabilité

Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une fonction $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que $P(\Omega) = 1$

Un événement A est dit impossible si $A = \varnothing$, presque impossible si $P(A) = 0$.
Un événement A est dit certain si $A = \Omega$, presque certain si $P(A) = 1$.

Propriétés

Croissance

$$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

Union

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Sous-additivité

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$$

σ-sous-additivité

$$\boxed{P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)}$$

Additivité

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \ \underline{\textbf{si union disjointe}}}$$

σ-additivité

$$\boxed{P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) \ \underline{\textbf{si union disjointe}}}$$

Continuité croissante

$$\boxed{\forall n, A_n \subset A_{n+1} \Longrightarrow P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)}$$

Continuité décroissante

$$\boxed{\forall n, A_{n+1} \subset A_n \Longrightarrow P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)}$$

Système complet

Une famille d'événements $(A_i)_i \in I$ est un système complet d'événements si leur union est disjointe et certaine i.e.

$$\boxed{\forall (i \neq j) \in I^2, A_i \cap A_j = \varnothing \text{ et } \bigcup_{i\in I} A_i = \Omega}$$

Système quasi-complet

Une famille d'événements $(A_i)_i \in I$ est un système quasi-complet d'événements si leur intersection est disjointe et presque certaine i.e.

$$\boxed{\forall (i \neq j) \in I^2, A_i \cap A_j = \varnothing \text{ et } P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1}$$

Indépendance

Définition

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Indépendance deux à deux

$$\boxed{\forall (i \neq j) \in I^2, P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)}$$

Indépendance finie

$$\boxed{\forall J \subseteq I \text{ fini, non vide}, P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)}$$

Indépendance infinie

$$\boxed{P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{n} P(A_i)}$$

Formules importantes

Probabilités conditionnelles

Si $P(A) \neq 0$,

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Si A et B sont indépendants, alors $P_A(B) = P(B)$ Si $A \subseteq B$, alors $P_A(B) = 1$

Probabilités totales

Si $(A_i)_i \in I$ est un système complet d'événements, alors

$$\boxed{P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i)}$$

Si de plus, $\forall i, P(A_i) > 0$, alors

$$\boxed{P(B) = \sum_{i \in I} P_{A_i}(B)P(A_i)}$$

Probabilités composées

Si $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$, alors

$$\boxed{P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)}$$

Formule de Bayes

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}}$$

Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système quasi-complet d'événements tous de probabilité non nulle, alors

$$\boxed{\forall i \in J, P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\sum_{j \in J} P(A_j) \times P_{A_j}(B)}}$$

Variables aléatoires

Espérance

Si la série $\sum a_i P(X = a_i)$ converge absolument,

$$\boxed{E(X) = \sum_{i \in I} a_i P(X = a_i)}$$

Moment

Si la série $\sum a_i^k P(X = a_i)$ converge absolument, on dit que X a un moment d'ordre k :

$$\boxed{\sum_{i \in I} a_i^k P(X = a_i)}$$

Variance

Si X^2 est d'espérance finie, X aussi et

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

Ecart-type

$\sigma(X)$ est l'écart-type de X :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Linéarité ?

$$\boxed{E(aX + b) = aE(X) + b}$$

$$\boxed{V(aX + b) = a^2 V(X)}$$

Lois de probabilités

Loi Binonomiale : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

Nombre de succès parmis n épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p (et d'échec $q = 1 - p$).

$$\boxed{X(\Omega) = [\![0, n]\!]} \qquad \boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}} \qquad \boxed{E(X) = np} \qquad \boxed{V(X) = npq}$$

Loi géométrique : $X \sim \mathcal{G}(p)$

Temps avant le premier succès d'une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p (et d'échec $q = 1 - p$).

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}} \qquad \boxed{P(X = k) = pq^{k-1}} \qquad \boxed{E(X) = \frac{1}{p}} \qquad \boxed{V(X) = \frac{q}{p^2}}$$

Loi de Poisson : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Nombre de succès rares dans un intervalle de temps fixé.

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}} \qquad \boxed{P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}} \qquad \boxed{E(X) = \lambda} \qquad \boxed{V(X) = \lambda}$$

Inégalités

Markov

Si X est d'espérance finie,

$$\forall a > 0, \boxed{P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}}$$

Bienaymé-Tchebychev

Si X^2 est d'espérance finie,

$$\forall a > 0, \boxed{P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}}$$

Série génératrice

Si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$, la série génératrice de X est la série

$$\boxed{\sum P(X = n)t^n}$$

Son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.
$G_X : t \mapsto \sum P(X = n)t^n$ est définie et continue sur $[-1, 1]$, $\mathbb{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}}{k!}}$$

Espérance

X est d'espérance finie $\iff$ G_X est dérivable en 1
et alors $E(X) = G'_X(1)$

Variance

X^2 est d'espérance finie $\iff$ G_X est deux fois dérivable en 1
et alors $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$

Couples de variables aléatoires discrètes

Couple de v.a.d

C'est aussi une v.a.d. par intersection de v.a.d.

$$\begin{array}{lcl} (X,Y):\Omega & \to & X(\Omega)\times Y(\Omega) \\ \omega & \mapsto & (X(\omega),Y(\omega)) \end{array}$$

Loi conjointe

Loi de proba de (X,Y) : loi conjointe :

$$\begin{array}{lcl} \forall (i,j)\in I\times J, & & \\ P((X,Y)=(a_i,b_i)) & = & P(X=a_i,Y=b_i) \\ & = & P((X=a_i)\cap(Y=b_i)) \\ & = & p_{i,j}\in[0,1] \end{array}$$

Lois marginales

$$\begin{array}{ll} \forall i\in I, & P(X=a_i)=\sum_{j\in J}P(X=a_i,Y=b_j) \\ \forall j\in J, & P(Y=b_j)=\sum_{i\in I}P(X=a_i,Y=b_j) \end{array}$$

La connaissance de la loi conjointe permet de connaître les lois marginales.
La réciproque n'est pas toujours vraie.

Indépendance

Les v.a X et Y sont indépendantes ($X \perp\!\!\!\perp Y$)
$\iff \forall(a,b)\in X(\Omega)\times Y(\Omega), P(X=a,Y=b)=P(X=a)P(Y=b)$

Par définition, si X et Y sont indépendantes, alors les lois marginales permettent de retrouver la loi conjointe.

Indépendance deux à deux d'une famille de v.a.

Si $\forall(i,j)\in I^2, i\neq j,$ alors
$\forall(a,b), P(X_i=a,X_j=b)=P(X_i=a)P(X_j=b)$

Indépendance d'une famille de v.a.

Pour toute partie finie non vide $J\subset I$

$$\forall(a_j)j_J, P\left(\bigcap_{j\in J}X_j=a_j\right)=\prod_{j\in J}P(X_j=a_j)$$

Stabilité de l'indépendance

Si $X \perp\!\!\!\perp Y,$ alors $\forall A\subset X(\Omega),\forall B\subset Y(\Omega)$
$P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B)$

Stabilité par les fonctions

Si $X \perp\!\!\!\perp Y$,
alors $\forall(\varphi,\psi),\varphi(X) \perp\!\!\!\perp \psi(Y)$

Stabilité par les fonctions (lemme des coalitions)

Si $(X_1,\dots,X_n)$ sont indépendantes , alors
$\forall(\varphi,\psi),\forall p\in[\![1,n-1]\!],\varphi(X_1\dots X_p) \perp\!\!\!\perp \psi(Y_{p+1}\dots Y_n)$

Sommes de variables aléatoires

Somme de deux v.a.

$$\boxed{\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)}$$

Loi de probabilité de la somme

$$\boxed{\forall c \in Z(\Omega), P(Z = c) = \sum_{\substack{(i,j)\in I\times J \\ a_i+b_j=c}} p_{i,j}}$$

Stabilité de la loi binomiale

Si $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$
alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$

Stabilité de la loi de Poisson

Si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$
alors $X1 + X2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Espérance de la somme

Si X et Y sont d'espérance finie alors $X + Y$ aussi et
$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

Linéarité de l'espérance

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}$,
$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$

Covariance

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= E[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Variance

Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie
alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$

Inégalités de l'espérance et de la covariance

Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors :

$$\boxed{[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)}$$

Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors :

$$\boxed{[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2 \leq V(X)V(Y)}$$

Corrélation

Si X^2 et Y^2sont d'espérance finie, alors,
X et Y ne sont pas correlées $\iff$ $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

Conséquences de la corrélation

$\boxed{\text{Si } X \perp\!\!\!\perp Y}$, alors :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \quad \begin{aligned} &\iff E(X,Y) = E(X)E(Y) \\ &\iff V(X+Y) = V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

$$\boxed{X \perp\!\!\!\perp Y \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} X \text{ et } Y \text{ non correlées}}$$

Variance et indépendance

Si $(X_1 \ldots X_n)$ sont deux à deux indépendantes, alors
$V(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$

Série génératrice et indépendance

Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N} et X \perp\!\!\!\perp Y$, alors,
$\forall t \in [-1, 1], G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$

Loi faible des grands nombres

Soit (X_k) une suite de v.a.d. et $\forall n \in \mathbb{N}^*, Z_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$

Si les X_k sont <u>indépendantes</u> et de <u>même espérance finie μ</u> et de <u>même variance finie σ^2</u>, alors :

$$\boxed{\forall a > 0, P(|A_n - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{na^2} \underset{n\to+\infty}{\lim} 0}$$