Fraction Rationelles

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Le corps des fractions rationnelles

$\mathbb{K}(X)$

La relation sur $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^* \quad : \quad (P, Q) \sim (P', Q') \iff P'Q = PQ'$ est une relation d'équivalence

$\mathbb{K}(X)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$pour $\sim$, notées $\dfrac{P}{Q}$

Alors $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif

Fraction irréductible

$\forall F \in \mathbb{K}(X)$,

$\exists!(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ à cst $\times$ près tq

$F = \dfrac{P}{Q}, P \wedge Q = 1$ et $\mathrm{dom}(Q) = 1$

On dit que $\dfrac{P}{Q}$ est irréductible

Degré d'une fraction

$$\deg\left(\frac{P}{Q}\right) = \deg(P) - \deg(Q)$$

$\forall (F, G) \in \mathbb{K}(X)^2$,

$$\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$$

$$\deg(F + G) \leq \max\Big(\deg(F), \deg(G)\Big)$$

Zéros et poles d'une fraction

Si $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, alors

Les racines de P sont les <u>zéros</u> de F

Les racines de Q sont les <u>poles</u> de F

Multiplicité d'un zéro ou d'un pole

Si $F \in \mathbb{K}(X) = \dfrac{P}{Q}$ sous forme irréductible, alors

Si a est un zéro de F et une racine de multiplicité m de P,

Alors$a$ est un zéro de F de multiplicité m

Si a est un pole de F et une racine de multiplicité m de Q,

Alors$a$ est un pole de F de multiplicité m

Décomposition en éléments simples

Décomposition de taille 2

Soit $(A,B)\mathbb{K}[X]^2$ tels que $A \wedge B = 1$

et $C \in \mathbb{K}[X]$ tq $\deg(C) < \deg(AB)$

Alors $\exists!(P,Q) \in \mathbb{K}(X), \begin{cases} \deg(P) < \deg(A) \\ \deg(Q) < \deg(B) \\ \dfrac{1}{AB} = \dfrac{P}{A} + \dfrac{Q}{B} \end{cases}$

Décomposition de taille N

Soit $(A_1,\dots,A_N)\mathbb{K}[X]^N$ premiers entre eux

et $N \in \mathbb{K}[X]$ tq $\deg(N) < \deg(A_1 \dots A_N)$

Alors $\exists!(N_1,\dots,N_n) \in \mathbb{K}[X]^n, \begin{cases} \forall i, \deg(N_i) < \deg(A_i) \\ \dfrac{N}{A_1 \dots A_N} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{N_i}{A_i} \end{cases}$

Décomposition d'une puissance

Soit $a \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$

Alors $\exists!(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\frac{P}{(X-a)^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(X-a)^i}$$

Décomposition de $\dfrac{P'}{P}$ sur $\mathbb{C}$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$,

$(z_1,\dots,z_n)$ les racines de P

et $(m_1,\dots,m_n)$ leurs multiplicités

Alors $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{m_k}{X - z_k}$

Décomposition par dérivation

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ à poles simples de degré < 0

On note $(z_1,\dots,z_n)$ les racines de Q

Alors $\dfrac{P}{Q} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{c_i}{X - z_i}$ où $c_i = \dfrac{P(z_i)}{Q'(z_i)}$

Partie entière

Soit $(N,D) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$

$\exists!(E,F) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X), \dfrac{N}{D} = E + F$ avec $\deg(F) < 0$

E est le reste dans la division de N par D, c'est la partie entière de $\dfrac{N}{D}$

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Soit $F \in \mathbb{C}(X) = \dfrac{P}{Q}$ sous forme irréductible

On note $(p_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les zéros de F et $(m_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ leurs multiplicités

Alors $\exists!(E, a_{1,1},\dots,a_{n,m_n}) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}^{m_1+,\dots,m_n}$,

$$F = E + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_k} \frac{a_{k,i}}{(X-p_k)^i} \text{ et } \deg(E) < \deg(Q)$$

On a décomposé F en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Soit $F \in \mathbb{R}(X) = \dfrac{P}{Q}$ sous forme irréductible

Soit $Q = a\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - z_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{q}(X^2 + a_iX + b_i)^{\mu_i}$ la D.E.S de Q sur $\mathbb{R}$

Alors $\exists!(E, a_{1,1},\dots,a_{p,m_p}, A_{1,1},\dots,A_{q,\mu_q}) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}^{m_1+,\dots,m_n} \times \mathbb{R}_1[X]^{\mu_1+,\dots,\mu_q}$,

$$F = E + \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{m_k} \frac{a_{k,i}}{(X-z_k)^i} + \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{\mu_k} \frac{A_{k,j}}{(X^2 + a_kX + b_k)^j} \text{ et } \deg(E) < \deg(Q)$$

On a décomposé F en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Méthode : Décomposition en éléments simples

- On commence par écrire la décomposition "imcomplète" :
- Pour chaque polynôme P_i à la puissance m_i au dénominateur, on écrit $F = \frac{a_{1,1}}{P_1^1} + \cdots + \frac{a_{1,m_1}}{P_1^{m_1}} + \cdots + \frac{a_{n,m_n}}{P_n^{m_p}}$
- Pour trouver les a_i,
  - La plupart du temps, on identifie les coefficients de F et des P_i
  - Sinon, on peut évaluer en un point ou mutliplier par X et utiliser les théorèmes du plus haut degré en $+\infty$
- Si on fait une D.E.S sur $\mathbb{R}$ et qu'il y a un polynôme de degré 2, on fait sur $\mathbb{C}$ puis on regroupe par pôles complexes conjugués