Dérivation

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Dérivabilité

f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est finie

On note $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Lien avec Taylor

f est dérivable en a si et seulement si

$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in I, |x-a| < \varepsilon \implies f(x) = f(a) + l(x-a) + o_a(x-a)$

Alors $f'(a) = l$

Opérations sur les fonctions dérivables

Somme

Si f et g sont dérivables en a,

Alors $f+g$ est dérivable en a et

$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

Produit

Si f et g sont dérivables en a,

Alors $f \cdot g$ est dérivable en a et

$(f \cdot g)'(a) = (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

Composition

Si f et g sont dérivables en a,

Alors $f \circ g$ est dérivable en a et

$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$

Quotient

Si f et g sont dérivables en a et $g(a) \neq 0$,

Alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et

$\dfrac{f}{g}'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Théorème de la bijection monotone

Si f est bijective, monotone et dérivable en a,

Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f(a) \neq 0$ et

$(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$

Dérivées d'ordre supérieur

Définition

$\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}$ est la dérivée k-ième de f

$\mathcal{D}^k(E, F)$ est l'ensemble des fonctions k fois dérivables de E dans F

$\mathcal{C}^k(E, F)$ est l'ensemble des fonctions k fois dérivables de E dans F dont la dérivée k-ième est continue

Formule de Leibniz

Si f et g sont k fois dérivables sur $I,$ alors fg est k fois dérivable sur I et

$$(fg)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

Opéarations sur les fonctions dérivables d'ordre supérieur

f et g sont $\mathcal{C}^k \implies f + g$ est $\mathcal{C}^k$

f et g sont $\mathcal{C}^k \implies f \cdot g$ est $\mathcal{C}^k$

f et g sont $\mathcal{C}^k$ et $\forall x, g(x) \neq 0 \implies \dfrac{f}{g}\mathcal{C}^k$

Propriétés des fonctions dérivables

Théorème de Rolle

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$,

Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Théorème des accroissements finis

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$,

Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Inégalité des accroissements finis

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $\forall t \in]a, b[, f'(t) \in [m, M]$,

Alors $f(b) - f(a) \in [m(b - a), M(b - a)]$

Théorème de la limite de la dérivée (prolongement $\mathcal{C}^1$)

Si f est continue et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell,$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$

Prolongement $\mathcal{C}^k$

Si f est $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $I \setminus \{a\},$ alors f est $\mathcal{C}^{k+1}$ en a

Fonctions réciproques

Difféomorphismes

f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si

f est $\mathcal{C}^k$ et f^{-1} est $\mathcal{C}^k$

Difféomorphisme bijectif

Une fonction bijective $\mathcal{C}^k$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si et seulement si

sa dérivée ne s'annule pas

Fonctions complexes

Décomposition

f est dérivable si et seulement si

$\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables et $f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$

Fonction lipschitzienne de $\mathbb{C}$

Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ et $\forall t \in]a, b[, |f'(t)| \leq M,$

Alors f est lipschitzienne sur $[a, b]$ et $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$