Dénombrement

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Introduction

Existence

$$\forall X \subsetneq [\![1n]\!],\ \text{non vide}, \exists p \in \mathbb{N}, \begin{cases} 0 < p < n \\ \exists f \text{ une bijection de } X \text{ dans } [\![1p]\!] \end{cases}$$

Injectivité

Soit $(n,p) \in {\mathbb{N}^*}^2, f : [\![1n]\!] \to [\![1p]\!]$ injective

Alors $p \leq n$

Surjectivité

Soit $(n,p) \in {\mathbb{N}^*}^2, f : [\![1n]\!] \to [\![1p]\!]$ surjective

Alors $p \geq n$

Bijectivité

Soit $(n,p) \in {\mathbb{N}^*}^2, f : [\![1n]\!] \to [\![1p]\!]$ bijective

Alors $p = n$

Ensembles finis

Relations entre les cardinaux

Soit E et F deux ensembles finis et $f : E \to F,$ alors

$$f \text{ bijective} \implies \text{Card}E = \text{Card}F$$

$$f \text{ injective} \implies \text{Card}E \leq \text{Card}F$$

$$f \text{ surjective} \implies \text{Card}E \geq \text{Card}F$$

Ensembles de même cardinal

Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal et $f : E \to F$

$Alors f$ est injective $\iff$ f est bijective $\iff$ f est surjective

Cardinal de l'union

Soit E un ensemble fini

Soit A et B deux sous-ensembles de E

Alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B)$

Principe des bergers

Soit $f : E \to F$ où F est fini

Soit p le nombre d'antécédents de tous les éléments de F

Alors $\text{Card}E = p\text{Card}F$

Cardinal et partition

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition d'un ensemble fini E

Alors $\text{Card}E = \sum_{i\in I} \text{Card}A_i$

Cardinal du produit cartésien

Soit E et F deux ensembles finis

Alors $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}E\text{Card}F$

Nombre de parties

Soit E un ensemble fini

Alors $\text{Card}P(E) = 2^{\text{Card}E}$

Dénombrement

k-listes

Une k-liste de E est un élement de E^k

Il y a n^k k-listes de E

k-arrangements

Un k-arrangement de E est une k-liste de E sans doublons

Il y a $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ k-arrangements de E

Permutations

Une permutation de E est un n-arrangement de E

Il y a $n!$ permutations de E

Combinaisons

Une k-combinaison de E est un k-arrangement de E

Il y a $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{p!(n-k)!}$ k combinaisons de E

Formule de Pascal

$$\forall 0 \leq k \leq n,\quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Formule de Newton

$$\forall 0 \leq k \leq n,\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Binôme de Newton

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$