

Compacité

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Définition

Une partie K d'un evn est compacte si
de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente vers $\ell \in K$
i.e $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tq $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell \in K$

Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente
i.e tout segment de \mathbb{R} est compacte

Valeur d'adhérence

Un vecteur a est une valeur d'adhérence de (u_n) si on peut extraire de (u_n) une suite convergente vers a

Propriétés des valeurs d'adhérence

$K \subset E$ est compacte \iff
toute suite de vecteurs de K
possède au moins 1 valeur d'adhérence

Une suite réelle (même bornée) peut avoir
plusieurs valeurs d'adhérence
Exemple : $((-1)^n)$ a -1 et 1

Si une suite de vecteurs converge vers ℓ
Alors sa seule valeur d'adhérence est ℓ

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérences
Alors elle diverge

Convergence et valeurs d'adhérence

Dans un compact, une suite de vecteurs converge \iff
elle possède une unique valeur d'adhérence

Stabilité par partie fermée

Toute partie fermée d'un compact est un compact

Stabilité par l'intersection

L'intersection de compacts est un compact

Stabilité par produit cartésien

Le produit cartésien d'un nombre fini de compacts est un compact

Stabilité par l'union

L'union d'un nombre fini de compacts est un compact

Partie compact d'un evn

Toute partie compacte d'un evn est fermée et bornée

Cas particulier de \mathbb{R}^n

Une partie de \mathbb{R}^n est compacte
 \iff elle est fermée et bornée

Compacité et continuité

L'image d'un compact par une fonction continue est un compact
En particulier, toute fonction réelle continue sur un compact d'un evn est bornée et atteint ses bornes

Compacité et fermeture

Une partie d'une evn de dimension finie est compacte
 \iff elle est fermée et bornée

Conséquence : convergence

Dans un evn de dimension finie
on peut extraire de toute suite bornée une suite convergente

Sous espace vectoriel fermé

Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un evn est fermé

Conséquences

En particulier, toute fonction réelle continue sur une partie fermée d'un evn est bornée et atteint ses bornes
Convergence uniforme \implies Convergence

Théorème de Heine

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue