Logique

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Syntaxe

Règles de la logique propositionnelle :

$$\neg\Big|^1 \quad \wedge\Big|^2 \quad \vee\Big|^2 \quad \longrightarrow\Big|^2 \quad \longleftrightarrow\Big|^2$$

$$\top\Big|^0 \quad \bot\Big|^0 \quad v\Big|^0_{\mathcal{P}}$$

Opérateurs booléens

$a \cdot b \sim a$ et b

$a + b \sim a$ ou b

$\bar{a} \sim$ non a

Fonctions booléennes

Environnement propositionnel : fonction $\rho : \mathcal{P} \to \mathbb{B}$ Interprétation des formules :

$$\begin{aligned}
[\![\top]\!]^\rho &= V & [\![\bot]\!]^\rho &= F \\
[\![p]\!]^\rho &= \rho(p) & [\![\neg G]\!]^\rho &= \overline{[\![G]\!]^\rho} \\
[\![G \wedge H]\!]^\rho &= [\![G]\!]^\rho \cdot [\![H]\!]^\rho & [\![G \vee H]\!]^\rho &= [\![G]\!]^\rho + [\![H]\!]^\rho \\
[\![G \longrightarrow H]\!]^\rho &= \overline{[\![G]\!]^\rho} + [\![H]\!]^\rho & [\![G \longleftrightarrow H]\!] &= \left(\overline{[\![G]\!]^\rho} + [\![H]\!]^\rho\right) \cdot \left([\![G]\!]^\rho + \overline{[\![H]\!]^\rho}\right)
\end{aligned}$$

Sémantique

Formules équivalentes

$$G \equiv H \iff [\![G]\!] = [\![H]\!]$$

Conséquence sémantique

$$G \vDash H \iff \forall \rho \in \mathbb{B}^{\mathcal{P}}, ([\![G]\!]^\rho = V \Rightarrow [\![H]\!]^\rho = V)$$

Une formule G est

- valide si $\forall \rho \in \mathbb{B}^{\mathcal{P}}, [\![G]\!]^\rho = V$
- satisfiable si $\exists \rho \in \mathbb{B}^{\mathcal{P}}, [\![G]\!]^\rho = V$
- insatisfiable si $\nexists \rho \in \mathbb{B}^{\mathcal{P}}, [\![G]\!]^\rho = V$

On dit que ρ est un modèle de $H \iff [\![H]\!]^\rho = V$

Equivalence à un ensemble de formules Γ

$$H \equiv \Gamma \iff \forall \rho \in \mathbb{B}(\mathcal{P}), \Big(\forall G \in \Gamma, [\![G]\!]^\rho = V\Big) \Rightarrow [\![H]\!]^\rho = V$$

Représentation des fonctions booléennes

Par des formules

Avec $f \in \mathbb{F}$ une fonction booléenne, $\exists H \in \mathcal{F}, [\![H]\!] = f$

Par des formules sous forme normale

$l = p \vee \neg p$: littéral

$C = \bigwedge_{i=1}^{n} l_i$: clause conjonctive

$D = \bigvee_{i=1}^{n} C_i$: clause disjonctive

$\bigwedge_{i=1}^{n} D_i$: formule normale conjonctive

$\bigvee_{i=1}^{n} C_i$: formule normale disjonctive