Intégrales à paramètre

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Soit une fonction

$$\begin{aligned} f : X \times T &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto f(x,t) \end{aligned}$$

Continuité

$$\begin{cases} \forall t \in T, x \mapsto f(x,t) \text{ est } \boxed{\textit{continue}} \text{ sur } X \\ \Big(\forall x \in X, t \mapsto f(x,t) \text{ est } \textit{cpm} \text{ sur } T\Big) \\ \exists \varphi \ \textit{cpm} \ \text{ et } \underline{\text{intégrable}} \text{ sur } T, \forall (x,t) \in X \times T, |f(x,t)| \leq \varphi(t) \end{cases} \implies g : x \mapsto \int_T f(x,t)\mathrm{d}t \text{ est continue sur } X$$

Dérivabilité

$$\begin{cases} \forall t \in T, x \mapsto f(x,t) \text{ est } \boxed{\mathcal{C}^1} \text{ sur} X \\ \forall x \in X, t \mapsto f(x,t) \begin{cases} t \mapsto f(x,t) \text{ est } \underline{\text{intégrable}} \Big(\textit{et cpm}\Big) \text{ sur } T \\ \Big(t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est } \textit{cpm} \text{ sur } T\Big) \end{cases} \\ \exists \varphi \ \textit{cpm} \ \text{ et } \underline{\text{intégrable}} \text{ sur } T, \forall (x,t) \in X \times T, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t) \end{cases} \implies \begin{cases} g : x \mapsto \int_T f(x,t)\mathrm{d}t \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } X \\ g'(x) = \displaystyle\int_T \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

Dérivations successives

$$\begin{cases} \forall t \in T, x \mapsto f(x,t) \text{ est } \boxed{\mathcal{C}^k} \text{ sur} X \\ \forall x \in X, t \mapsto f(x,t) \begin{cases} \forall j < k, t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) \text{ est } \underline{\text{intégrable}} \Big(\textit{et cpm}\Big) \text{ sur } T \\ \Big(t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial^k x}(x,t) \text{ est } \textit{cpm} \text{ sur } T\Big) \end{cases} \\ \exists \varphi \ \textit{cpm} \ \text{ et } \underline{\text{intégrable}} \text{ sur } T, \forall (x,t) \in X \times T, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi(t) \end{cases} \implies \begin{cases} g : x \mapsto \displaystyle\int_T f(x,t)\mathrm{d}t \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ sur } X \\ \forall j < k, g^{(j)}(x) = \displaystyle\int_T \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\mathrm{d}t \end{cases}$$