Inégalités dans $\mathbb{R}/\mathbb{C}$

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Inégalités classiques

Inégalité triangulaire

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{C}, \begin{cases} |x+y| \leq |x| + |y| \\ |x| - |y| \leq |x-y| \end{cases}}$$

$$\boxed{\forall (z_1 \dots z_n) \in \mathbb{C}^n, \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|}$$

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si f et g sont deux fonctions <u>continues</u> de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\boxed{\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t}$$

Inégalité des accroissements finis

Si f est une fonction $\underline{\mathcal{C}^1}$ de I dans $\mathbb{C}$,
et que $\forall t \in I, |f'(t)| \leq M$, alors

$$\boxed{\forall (a,b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leq M|a-b|}$$

Borne inférieure

Si $A \subset \mathbb{R}$ est <u>non vide</u> et <u>minorée</u>, alors

$$\boxed{m = \inf A \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \geq m \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a_0 \in A, a_0 \leq m + \varepsilon \end{cases}}$$

C'est le <u>plus grand minorant</u> de A.

Borne supérieure

Si $A \subset \mathbb{R}$ est <u>non vide</u> et <u>majorée</u>, alors

$$\boxed{M = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a_0 \in A, a_0 \geq M - \varepsilon \end{cases}}$$

C'est le <u>plus petit majorant</u> de A.

Inégalité de Jensen

Convexité

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \text{ est convexe} \\ \Longleftrightarrow \\ \forall (x,y) \in \mathcal{D}^2, x \leq y \implies [x,y] \subset \mathcal{D} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} f : I \to \mathbb{R} \text{ est convexe sur } I \\ \Longleftrightarrow \\ \forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f(1-\lambda x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \end{array}}$$

Inégalité de Jensen

Si f est <u>convexe sur I</u>, et $n \geq 2$ Avec $(x_1 \dots x_n) \in I^n, (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in [0,1]^n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, alors

$$\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)}$$

Autres caractéristiques de $\mathbb{R}$

Caractère archimédien

$\mathbb{R}$ est <u>archimédien</u> :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, nx \geq y}$$

Théorème des valeurs extrêmes

Si f est une fonction <u>continue</u> de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\boxed{\exists (\alpha, \beta) \in [a,b]^2, \forall x \in [a,b], f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)}$$

Densité

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \text{ est dense} \\ \Longleftrightarrow \\ \text{Pour tout intervalle } I \text{ non vide de } \mathbb{R}, A \cap I \neq \emptyset \end{array}}$$

$\mathbb{Q}$ est <u>dense</u> dans $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est <u>dense</u> dans $\mathbb{R}$.

Lemme des pentes

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ \Longrightarrow \\ \forall x_1 < x_2, x_3 \in [a,b]^3, \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \dfrac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \end{array}}$$